LOGARITMOS: APLICACIONES EN PROBLEMAS

1) Una escala habitualmente utilizada, en la medición de la intensidad de los sismos es la escala Richter. Los grados se calculan mediante la expresión: $R = Log\left(\frac{A}{P}\right)$, donde (A) es la amplitud medida en micrómetros (1 micrómetro = 10^{-4} cm), y (P) es el período medido en segundos. ¿Cuál es la magnitud de un sismo en la escala Richter, si la amplitud es 10^{-2} cm y su período es 1 segundo?

RESPUESTA:

Como **1 micrómetro = 10^{-4} cm**, entonces **10^{-2} cm** equivalen a **10^{2}** micrómetros.
Entonces la cantidad de grados Richter **R** es:

$$R = Log\left(\frac{A}{p}\right) = Log\left(\frac{10^2}{1}\right) = 2$$

2) El inventor del ajedrez pidió como pago, que se llenase cada escaque (cuadrito del tablero), con el doble de trigo que el escaque anterior. Si se comienza con 1 grano de trigo. ¿En qué escaque habrá que colocar 4.194.304 granos de trigo?

RESPUESTA:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} a_n = \text{valor del término general} \\ a_1 = \text{valor del primer término} \\ r = \text{razón de la progresión} \\ n = \text{número de términos} \end{array} \right.$$

Tabla datos :

Escaques(cuadritos) 1 2 3 4.......64

Granos de trigo 1 2 4 8.......a_n

El número de granos de trigo 1, 2, 4, 8, ... es una progresión geométrica $a_1 = 1$, $r = 2$, el número de términos n se corresponde con el número de cuadritos, hay 64 en total.

$a_n = 4194304$ granos de trigo

Tenemos que calcular n.

Despejamos n de la fórmula tomando logaritmos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow \frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$

$$\log\frac{a_n}{a_1} = \log r^{n-1} \rightarrow \log\frac{a_n}{a_1} = (n-1)\log r$$

$$\frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} = n-1 \rightarrow n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log 4194304 - \log 1}{\log 2} + 1 = 23$$ En el cuadrito 23.

3) Una matrioska consiste, en una muñeca que contiene en su interior otras de igual forma, pero cada vez más pequeñas. El volumen de cada muñeca es 2/3 de la anterior. Si la muñeca mayor ocupa 360 cm^3. ¿Cuántas muñecas hay, si la más pequeña ocupa 31,6 cm^3?

RESPUESTA:

El volumen de las muñecas forma una progresión geométrica decreciente.

Tenemos que calcular el número de muñecas n.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad \text{Datos:} \left| \begin{array}{l} a_1 = 360 \\ a_n = 31{,}6 \\ r = 2/3 \\ n = ? \end{array} \right.$$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log 31{,}6 - \log 360}{\log 2/3} + 1 = 7$$

Hay 7 muñecas

4) El servicio de control de calidad, de una empresa que fabrica lavadoras, ha comprobado que el porcentaje de lavadoras, que sigue funcionando al cabo de (t) años, viene dado por la función $f(t)=(8/9)^t$. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir, para que funcionen el 40% de las lavadoras fabricadas?

RESPUESTA:

Si funcionan el 40% de las lavadoras, $f(t) = 0,4$.

$$f(t) = \left(\frac{8}{9}\right)^t \rightarrow 0,4 = \left(\frac{8}{9}\right)^t$$

Para despejar t tomamos logaritmos en ambos lados de la ecuación y después aplicamos el logaritmo de una potencia.

$$\log 0,4 = \log\left(\frac{8}{9}\right)^t \rightarrow \log 0,4 = t \cdot \log\left(\frac{8}{9}\right)$$

$$t = \frac{\log 0,4}{\log(8/9)} = 7,8 \text{ años } \simeq 7 \text{ años } 284 \text{ días.}$$

5) El crecimiento de un bosque, viene dado por la función $F(t)=A\cdot(1+i)^t$, donde (F) es la madera que habrá dentro de (t) años, (A) la madera actual, e (i) la tasa de crecimiento anual. Si la tasa de crecimiento anual $i = 0,02$ y se mantiene constante. Calcula el tiempo, que tardará en duplicarse la madera del bosque.

RESPUESTA:

$$F(t) = A \cdot (1+i)^t$$

$$\text{Datos:} \left| \begin{array}{l} A = \text{madera actual} \\ F(t) = \text{madera al cabo de } t \text{ años} \\ i = 0,02 \text{ tasa de creciento anual} \end{array} \right.$$

Para que se duplique la madera $F(t) = 2A$

$$2A = A \cdot (1 + 0{,}02)^t$$

$$2A = A \cdot (1{,}02)^t \quad \rightarrow \quad \frac{2\cancel{A}}{\cancel{A}} = (1{,}02)^t$$

Tomamos logaritmos para despejar t

$$2 = (1{,}02)^t \quad \rightarrow \quad \log 2 = \log (1{,}02)^t$$

$$\log 2 = t \cdot \log(1{,}02)$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} = 35$$

La madera del bosque tardará en duplicarse 35 años

6) Calcular el tiempo que debo tener invertido, 2.500€ al 6% de interés compuesto, si quiero obtener 1.977,12€ de beneficio.

RESPUESTA:

Colocar un capital a interés compuesto significa que tras cada periodo de tiempo el interés producido se suma al capital.

Fórmula del interés compuesto:

$$Cf = Ci \cdot (1 + r)^t$$

$$\left| \begin{array}{l} Cf = \text{Capital final o montante} \\ Ci = \text{Capital inicial} \\ r = \text{rédito al tanto por uno, } r = \dfrac{i\ (\text{interés})}{100} \\ t = \text{tiempo en años.} \end{array} \right.$$

Datos :

Ci = 2.500 €   Beneficio = 1977,12 €   i = 6%   t = ?

$$Cf = Ci \cdot (1+r)^t$$

- El capital final que tendremos será el capital inicial más el beneficio.

Cf = 2500 + 1977,12 = 4477,12 €

- Rédito r $\rightarrow r = \dfrac{i}{100} \rightarrow r = \dfrac{6}{100} = 0{,}06$

- Despejamos t de la fórmula tomando logaritmos

$$Cf = Ci \cdot (1+r)^t \rightarrow \frac{Cf}{Ci} = (1+r)^t$$

$$\log\frac{Cf}{Ci} = \log(1+r)^t \rightarrow \log Cf - \log Ci = t \cdot \log(1+r)$$

$$t = \frac{\log Cf - \log Ci}{\log(1+r)}$$

- Calculamos el valor de t

Sustituimos Cf, Ci y r en la fórmula.

$$t = \frac{\log 4477{,}12 - \log 2500}{\log(1+0{,}06)} = 10 \text{ años}$$

7) Si se invierte un capital a una tasa fija, y los intereses se capitalizan periódicamente, es decir que se suman al capital, y la suma obtenida se reinvierte, con la misma tasa por otro período igual, el capital original se incrementa con la fórmula del interés compuesto, según la cual, después de (n) períodos, se tiene:

$$C_f = c_i\left(1+r\right)^n$$

Donde C_f es el capital acumulado, (c_i) es el capital inicial y (r) es la tasa de interés. ¿En cuántos años se tendrá, que un capital de $ 10.000, invertido a una tasa del 3,5% anual, se incremente hasta $ 11.475?

RESPUESTA:

Al convertir la fórmula del interés compuesto a su forma logarítmica se tiene:

$$\log C_f = \log c_i\left(1+r\right)^n$$

$$= \log c_i + \log\left(1+r\right)^n$$

$$\log C_f = \log c_i + n\log\left(1+r\right)$$

Entonces, si $C_f = 11.475$, $c_i = 10.000$ y $r = 0{,}035$, al sustituir valores queda:

$$\log 11.475 = \log 10.000 + n\log\left(1+0{,}035\right)$$

y, resolviendo para n:

$$n\log(1{,}035) = \log 11.475 - \log 10.000$$

$$= \log\left(\frac{11.475}{10.000}\right) = \log 1{,}1475$$

$$n = \frac{\log 1{,}1475}{\log 1{,}035} = 4$$

Por lo que tendrán que transcurrir 4 años para obtener la cantidad deseada.

8) El terremoto más fuerte que ha ocurrido en España fue en Granada, el día de Navidad en 1884, con una magnitud de 6,7 en la escala de Richter. Mientras que el de San Francisco en 1906, tuvo una magnitud de 8,25. ¿Cuántas veces fue más fuerte, el de San Francisco que el de Granada?

RESPUESTA:

DATOS

$$M\ (\text{Granada}) = 6.7$$

$$M\ (\text{San Francisco}) = 8.25$$

RESOLUCIÓN

$$\mathbf{M = \log P}$$

Granada:

$$6.7 = \log P_{gr}$$

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$10^{6.7} = P_{gr}$$

P_{gg} = 5 011 872 veces mayor que la onda de referencia

San Francisco:

$$8.25 = \log P_{sf}$$

$$10^{8.25} = P_{sf}$$

P_{sf} = 177 827 941 veces mayor que la onda de referencia.

$$\frac{P_{sf}}{P_{gr}} = \frac{177827941}{5011872}$$

$$\frac{P_{sf}}{P_{gr}} = 35.48$$